جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر التحليل (4)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2015/2014

الأسم :
المدة : ساعة ونصف
العلامة : 100

السؤال الأول : (20 علامة)

اذكر تعريف تقارب متتالية في فضاء متري في نقطة منه ، ثمّ برهن أن كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي .

السؤال الثاني : (20 علامة)

عرّف النظيم في فضاء متجهي حقيقي V ، ثمّ أثبت أنه إذا كان V فضاء جداء داخلي فإن الدالة :

$V \to R_+ \; ; \; x \to \|x\| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$ تعرّف نظيماً على V .

السؤال الثالث : (15 علامة)

لتكن الدالة المعرفة بالشكل $f: R_+^3 - \{(0,0,0)\} \to R$ حيث $f(x,y,z) = \frac{\sin xyz}{x^3+y^3+z^3}$

ادرس وجود النهاية في النقطة $(0,0,0)$.

السؤال الرابع : (15 علامة)

اذكر تعريف التطبيق المستمر بانتظام بين فضائين متريين ، ثمّ أثبت أنه إذا كان $(V, \|.\|)$ فضاءً منظماً فإن التطبيق : $\mathrm{V} \to \mathrm{V} \; ; \; \mathrm{x} \to a\mathrm{x} \quad , \; 0 \neq a \in R$ مستمر بانتظام ،

السؤال الخامس : (15 علامة)

أثبت أن الدالة $f: R^2 \to R$ المعرفة بالشكل : $f(x,y) = xy$ قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من R^2 وأن تفاضلها هو الدالة : $d\, f_{(x_0,y_0)}: R^2 \to R \; ; \; (h,k) \to d\, f_{(x_0,y_0)}(h,k) = y_0 h + x_0 k$.

السؤال السادس : (15 علامة)

أدرس استمرار الدالة : $\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy} & ; xy \neq 0 \\ 1 & ; xy = 0 \end{cases}$ عند النقطة $(0,0)$ ، ثمّ أدرس استمرارها عند النقطة $(1,0)$ بكل من المتحولين x و y .

1

سلم تصحيح مقرر التحليل (٤)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام ٢٠١٤ - ٢٠١٥

السؤال الأول: 20

ليكن (E,d) فضاء متريا و (x_n) متتالية في E، نقول عن المتتالية (x_n) أنها متقاربة من النقطة a من E، إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث اذا كان $n \geq N_\varepsilon$ فإن $d(x_n,a)<\varepsilon$. (8)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة في الفضاء المتري (E,d) من النقطة a، عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث اذا كان $p \geq N_\varepsilon$ و $q \geq N_\varepsilon$ فإن: $d(x_q,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(x_p,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ (8)

وبالتالي:

$$d(x_p,x_q) \leq d(x_p,a)+d(a,x_q) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وهذا يعني ان (x_n) هي متتالية كوشي. (4)

السؤال الثاني: 20

اذا كان V فضاء متجهياً حقيقياً، فإن النظيم على V هو كل دالة حقيقية غير سالبة N معرفة على V.

$N: V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; ; \; x \longrightarrow N(x)$

تحقق الشروط التالية:

١- أياً كان x من V فإن: $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

٢- أياً كان x من V و a من $\mathbb{R}$ فإن: $N(ax)=|a|\,N(x)$

٣- أياً كان x و y من V فإن: $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$ (7)

- اذا كان V فضاء جداء داخلي فإن الدالة: $V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; ; \; x \longrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

تعرف نظيماً وذلك لأن:

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0$ (3)

١) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

$$\|ax\| = \sqrt{<ax, ax>} = \sqrt{a^2 <x, x>} = |a| \sqrt{<x,x>} = |a| \cdot \|x\|$$ -2

(4)

$$\|x+y\|^2 = <x+y, x+y> = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2 \leq$$ -3

$$\leq \|x\|^2 + 2|<x,y>| + \|y\|^2$$

وبالاعتماد على مبرهنة سابقة يكون

$$|<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>} \sqrt{<y,y>} = \|x\| \cdot \|y\|$$

ومنه نجد: (6)

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

السؤال الثالث: 15

إذا أخذنا المتتاليتين (x_n, y_n, z_n) و (x'_n, y'_n, z'_n):

$$(x_n, y_n, z_n) = (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,0)$$

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = (\tfrac{2}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0,0)$$ (5)

نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^3})}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{3}$$ (5)

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{2}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2}{n^3}}{\frac{10}{n^3}} = \frac{1}{5}$$ (5)

وبما أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$ فإننا نستنتج حسب

نتيجة سابقة أن $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ غير موجودة.

السؤال الرابع: 15

ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة

الجزئية D من E ويأخذ قيمه في F. نقول عن f أنه مستمر بانتظام

(8) على D إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه

إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d_E(x,y) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$

ليكن $(V, \|\cdot\|)$ فضاءً منظماً و ليكن التطبيق $0 \neq a_0 \in \mathbb{R}$, $V \to V, x \to a_0 x$
و لنبرهن انه مستمر بانتظام ،
نقابل كل عدد حقيقي موجب ε ، عدد حقيقي $\delta = \frac{\varepsilon}{|a_0|}$ بحيث اذا كان
x ، y أي عنصرين من V يحققان $\|x-y\| < \delta$ فإن :
(7)

$$d(a_0 x, a_0 y) = \|a_0 x - a_0 y\| = |a_0| \cdot \|x-y\| < |a_0| \delta = \varepsilon$$

اي ان هذا التطبيق مستمر بانتظام ،

السؤال الخامس : 15

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \to xy$ ، ولتكن (x_0, y_0) نقطة اختيارية من $\mathbb{R}^2$
فإن :

$$df_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (h,k) \to df_{(x_0,y_0)}(h,k) = y_0 h + x_0 k$$

هو تفاضلها ، وذلك لأن :

(5)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - y_0 h - x_0 k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

(5)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x_0+h)(y_0+k) - x_0 y_0 - y_0 h - x_0 k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$ (5)

السؤال السادس : 15

$$\varphi(x,y) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot 1 = 1$$ (7)

كما أن $\varphi(0,0) = 1$ فالدالة مستمرة عند النقطة $(0,0)$

$$\varphi(1,y) = \sin 1 \cdot \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} \varphi(1,y) = \sin 1 \cdot 1 = \sin 1 \neq 1$$ (4)

فالدالة ليست مستمرة بالنسبة للمتحول y عند النقطة $(1,0)$

$$\lim_{x \to 1} \varphi(x,0) = ~~\sin 1 \cdot 1 = \sin 1 \neq 1~~ \; 1 = \varphi(1,0)$$ (4)

فالدالة مستمرة بالنسبة للمتحول x عند النقطة $(1,0)$.

د. عصام نسيم